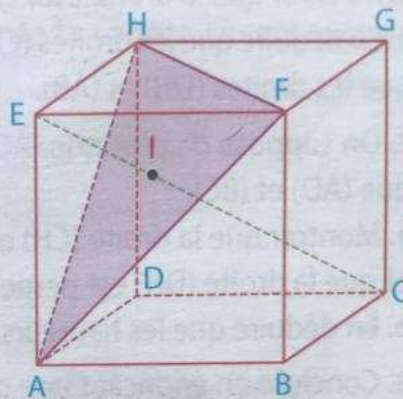


EXERCICE 1.



**159 Un tétraèdre dans un cube**

On considère un cube  $ABCDEFGH$ , d'arête de longueur 1. On note  $I$  le point d'intersection de la droite  $(EC)$  et du plan  $(AFH)$ .



1. a. Démontrer que les droites  $(EC)$  et  $(HF)$  sont orthogonales.  
b. Démontrer que les droites  $(EC)$  et  $(AF)$  sont orthogonales.  
c. En déduire la droite  $(EC)$  est perpendiculaire au plan  $(AFH)$ .
2. a. Démontrer que les droites  $(HI)$  et  $(AF)$  sont perpendiculaires.  
b. Que représente le point  $I$  dans le triangle  $AFH$  ?
3. Un tétraèdre est dit de :
  - type 1 si ses faces ont même aire ;
  - type 2 si les arêtes opposées sont orthogonales deux à deux ;
  - type 3 s'il est à la fois de type 1 et de type 2.
 Préciser de quel type est le tétraèdre  $EAFH$ .

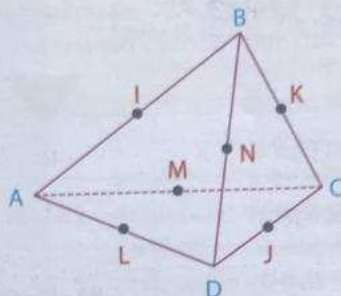
**PISTE :** questions 1. a. et 2. a. On pourra utiliser le plan médiateur du segment  $[AF]$ .

## EXERCICE 2.

### 164 PROBLÈME DE SYNTHÈSE

On considère un tétraèdre ABCD. On suppose que :  
 $AB = CD$ ,  $BC = AD$  et  $AC = BD$ .

On dit que le tétraèdre ABCD est équilatéral car ses faces ont les mêmes dimensions.



On note I, J, K, L, M, N les milieux respectifs des arêtes [AB], [CD], [BC], [AD], [AC] et [BD].

G est le point défini par la relation vectorielle :

$$\vec{AG} = \frac{1}{4} \vec{AB} + \frac{1}{4} \vec{AC} + \frac{1}{4} \vec{AD}.$$

1. a. Démontrer que  $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$ .  
 b. En déduire que les droites (IJ), (KL) et (MN) sont concourantes en G.
2. a. Quelle est la nature du quadrilatère IKJL ?  
 Préciser également la nature des quadrilatères IMJN et KNLM.  
 b. En déduire que les droites (IJ) et (KL) sont orthogonales. Démontrer de même que les droites (IJ) et (MN) sont orthogonales et les droites (KL) et (MN) sont orthogonales.
3. a. Montrer que la droite (IJ) est orthogonale au plan (MKN).  
 b. Que peut-on dire de la position relative des droites (AB) et (MK) ? En déduire que (IJ) est orthogonale à la droite (AB).  
 c. Montrer de même que (IJ) est orthogonale à la droite (CD).  
 d. Montrer que G appartient aux plans médiateurs de chacun des segments [AB] et [CD].  
 e. Justifier que G est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD.

**PISTE :** question 2.b. On pourra utiliser l'orthogonalité des diagonales d'un losange.

CORRIGÉ 1 ① (a) 1<sup>ère</sup> méthode : dans un repère orthonormé, on calcule  $\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{HF}$  :

dans  $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$  on a  $E(0; 0; 1)$ ,  $C(1; 1; 0)$ ,  $H(0; 1; 1)$ ,  $F(1; 0; 1)$ .

$$\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{HF} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \times 1 + 1 \times (-1) + (-1) \times 0 = 0 \text{ donc } (EC) \perp (HF)$$

2<sup>ème</sup> méthode :  $EF = EH$  et  $CF = CH$  donc la droite  $(EC)$  est incluse dans le plan médiateur du segment  $[HF]$ . Or ce plan est orthogonal à  $(HF)$  donc  $(EC) \perp (HF)$ .

(b) Les deux méthodes précédentes sont valables. Par exemple,  $EF = EA$  et  $CF = CA$  donc la droite  $(EC)$  est incluse dans le plan médiateur du segment  $[AF]$ . Or ce plan est orthogonal à  $(AF)$  donc  $(EC) \perp (AF)$ .

(c)  $(EC) \perp (HF) \subset (AFH)$  et  $(EC) \perp (AF) \subset (AFH)$ .

Comme  $(HF)$  et  $(AF)$  sont sécantes, on en déduit  $(EC) \perp (AFH)$

② (a)  $(EC)$  est incluse dans le plan médiateur de  $[AF]$  (car  $EA = EF$  et  $CA = CF$ ).

Or  $I \in (EC)$  donc  $I$  est dans le plan médiateur de  $[AF]$ , donc  $IA = IF$ .

De plus,  $HA = HF$ , donc  $(HI)$  est incluse dans le plan médiateur de  $[AF]$ .

Or ce plan est orthogonal à  $(AF)$ , donc  $(HI) \perp (AF)$ .

(b) On démontre de même que  $(FI) \perp (AH)$ .  $I$  est donc l'intersection de deux hauteurs du triangle  $AHF$  : c'est donc son orthocentre. Or, le triangle  $AHF$  est équilatéral, donc  $I$  est aussi centre de gravité, et centre des cercles inscrit et circonscrits.

③ Les triangles  $EAH$ ,  $EAF$  et  $EFH$  sont d'aire égale à la moitié de celle d'un carré de côté 1, soit  $\frac{1}{2}$ .

Le triangle  $AHF$  est équilatéral de côté  $a = \sqrt{2}$ . Une hauteur étant aussi une médiane dans un tel triangle, le théorème de Pythagore permet de calculer la longueur d'une hauteur, c'est  $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ , donc ici  $\frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ . On en déduit l'aire de  $AHF$  :  $\frac{\sqrt{6}}{2} \times \sqrt{2} = \sqrt{3}$

Le tétraèdre n'est donc pas de type 1.

$(EH) \perp (EAF)$  donc  $(EH) \perp (AF)$  (car  $(AF) \subset (EAF)$ ).

$(EF) \perp (EAH)$  donc  $(EF) \perp (AH)$  (car  $(AH) \subset (EAH)$ ).

$(EA) \perp (EHF)$  donc  $(EA) \perp (HF)$  (car  $(HF) \subset (EHF)$ ).

Le tétraèdre est donc de type 2.

CORRIGÉ 2 ① (a)  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$

(b)  $\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AG} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}(-\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

Donc  $\overrightarrow{IJ} = 2\overrightarrow{IG}$ , donc  $G \in (IJ)$ .

On démontre de même que  $G \in (KL)$  et  $G \in (MN)$ , ce qui signifie que les droites  $(IJ)$ ,  $(KL)$  et  $(MN)$  sont concourantes en  $G$ .

② (a) Le théorème des milieux dans  $ABC$  donne  $(IK) \parallel (AC)$  et  $IK = \frac{1}{2}AC$ .

Le théorème des milieux dans  $ADC$  donne  $(LJ) \parallel (AC)$  et  $LJ = \frac{1}{2}AC$ .

Donc  $(IK) \parallel (LJ)$  et  $IK = LJ$ . Le quadrilatère  $IKJL$  a donc deux côtés opposés parallèles et de même longueur : c'est donc un parallélogramme.

On a  $IK = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}BD = IL$  donc le parallélogramme  $IKJL$  est un losange.

On démontre de même que  $IMJN$  et  $KNLM$  sont des losanges.

(b) Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires donc  $(IJ) \perp (KL)$ ,  $(IJ) \perp (MN)$  et  $(MN) \perp (KL)$

③ (a) Les losanges précédents donnent  $KI = KJ$ ,  $MI = MJ$  et  $NI = NJ$ . Les points  $M, N, K$  étant non alignés, on en déduit que  $(MNK)$  est le plan médiateur de  $[IJ]$ , donc  $(IJ) \perp (MNK)$ .

(b)  $(MK) \subset (MNK)$  donc  $(MK) \perp (IJ)$ . De plus,  $(AB) \parallel (MK)$  donc  $(IJ) \perp (AB)$

(c)  $(NK) \subset (MNK)$  donc  $(NK) \perp (IJ)$ . De plus,  $(CD) \parallel (NK)$  donc  $(IJ) \perp (CD)$

(d)  $(GI) = (IJ)$  d'après ①b, donc  $(GI) \perp (AB)$ . Or  $I$  est le milieu de  $[AB]$  donc  $(GI)$  et donc  $G$  est dans le plan médiateur de  $[AB]$ .

De même  $G$  est dans le plan médiateur de  $[CD]$ .

(e) On a donc  $GA = GB$  et  $GC = GD$ .

On démontre de même que  $(KL) \perp (BC)$  et  $(KL) \perp (AD)$  et donc  $G$  est dans le plan médiateur de  $[BC]$  et de  $[AD]$ . Donc  $GB = GC$  et  $GA = GD$ .

Finalement,  $GA = GB = GC = GD$  donc  $G$  est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre  $ABCD$ .